Función par e impar

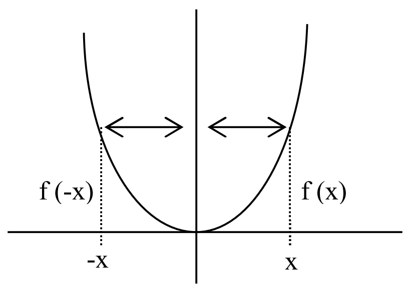
SIMETRÍA.

FUNCIÓN PAR. Si una función f satisface que f(-x) = f(x) para todo x en su dominio, entonces f es una **función par.**

Ejemplo. Comprobar que $f(x) = x^2$ es par.

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

Como f(-x) = f(x), entonces la función es par!



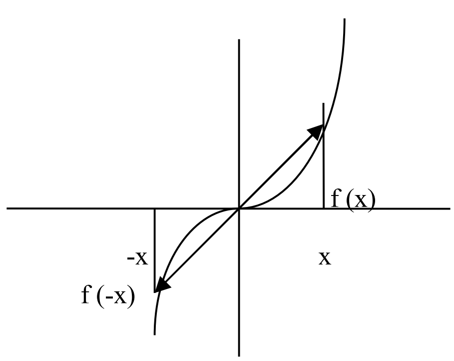
La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y.

FUNCIÓN IMPAR. Si una función f satisface que f(-x) = - f(x) para todo x en su dominio, entonces f es una **función impar.**

Ejemplo. Demostrar que $f(x) = x^3$ es una función impar.

$f(-x) = (-x)^3 = - x^3 = - f(x)$

Como f(-x) = - f(x), entonces la función es impar!



La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.

Ejemplos. Determine si cada una de las siguientes funciones es par, impar o ninguno de los dos.
$f(x) = x^5 + x$
$f(x) = 1 – x^4$
$f(x) = 2x – x^2$

Funciones pares e impares:

Sea f una función tal que si x está en el dominio de f, $-x$ también lo está:

(i) f es una función par si $f(-x) = f(x)$, para toda x en el *domf*.

(ii) f es una función impar si $f(-x) = -f(x)$, para toda x en el *domf*.

- La gráfica de una función *par* es simétrica con respecto al eje y
- La gráfica de una función *impar* es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

Ejemplos ilustrativos:

$f(x) = 2x^2$ es una función par, pués $f(-x) = 2(-x)^2 = 2x^2 = f(x)$

$f(x) = 3x^3$ es una función impar, pués $f(-x) = 3(-x)^3 = 3(-x^3) = -3x^3 = -f(x)$.

9. Determine si la función que se da es par, impar, o ninguna de las dos:

(a) $g(x) = 5x^2 - 4$ (b) $f(x) = x^3 + 1$ (c) $f(t) = 4t^5 + 3t^3 - 2t$

(d) $g(r) = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$ (e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (f) $h(x) = \dfrac{4x^2 - 5}{2x^3 + x}$

(g) $f(z) = (z-1)^2$ (h) $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$ (i) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(j) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

10. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ y $g(x) = \dfrac{1-x}{x}$

Muestre que f y g son funciones inversas.

11. Si $f(x) = x^2 + 2x + 2$,

encuentre dos funciones g para las cuales

$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$

12. Dada $g(z) = 4^z$ demostrar que $g(z+1) - g(z) = 3g(z)$

S o l u c i o n e s

9. Solución:

(a) $g(x) = 5x^2 - 4$

$g(-x) = 5(-x)^2 - 4 = 5x^2 - 4$

$g(-x) = g(x) = 5x^2 - 4$: g es una función par.

(b) $f(x) = x^3 + 1$

$f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1 \neq f(x)$: f no es una función par

$-f(x) = -(x^3 + 1) = -x^3 - 1 \neq f(-x)$: f no es una función impar

f no es ni par ni impar.

(c) $f(t) = 4t^5 + 3t^3 - 2t$

$f(-t) = 4(-t)^5 + 3(-t)^3 - 2(-t) = -4t^5 - 3t^3 + 2t = -(4t^5 + 3t^3 - 2t)$

$f(-t) = -f(t)$: f es una función impar

(d) $g(r) = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$

$g(-r) = \dfrac{(-r)^2 - 1}{(-r)^2 + 1} = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$

$g(-r) = g(r) = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$: g es una función par.

(e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$f(-x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -x > 0 \\ -1 & \text{si } -x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} = -f(x)$

$f(-x) = -f(x)$: f es una función impar

(f) $h(x) = \dfrac{4x^2 - 5}{2x^3 + x}$

$h(-x) = \dfrac{4(-x)^2 - 5}{2(-x)^3 + (-x)} = \dfrac{4x^2 - 5}{-2x^3 - x} = -\dfrac{4x^2 - 5}{2x^3 + x} = -h(x)$

$h(-x) = -h(x)$: h es una función impar.

(g) $f(z) = (z - 1)^2$

$f(-z) = (-z - 1)^2 = (z + 1)^2 \neq f(z)$: f no es una función par

$-f(z) = -(z - 1)^2 \neq f(-z)$: f no es una función impar

f no es ni par ni impar.

(h) $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$

$g(-x) = \dfrac{|-x|}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$

$g(-x) = g(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$: g es una función par.

(i) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$g(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$

$g(-x) = g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$: g es una función par.

(j) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$

$f(-x) = -f(x)$: f es una función impar

10. Solución:

$$f(x)=\frac{1}{x+1},\ g(x)=\frac{1-x}{x}$$

$$f(g(x))=\frac{1}{\frac{1-x}{x}+1}=\frac{1}{\frac{1-x+x}{x}}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

$$g(f(x))=\frac{1-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}}=\frac{\frac{x+1-1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}}=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{1}{x+1}}=\frac{x}{1}=x$$

$$f(g(x))=g(f(x))=x;$$

$\therefore$ f y g son funciones *inversas*.

11. $f(x)=x^2+2x+2$

Solución:

Encuentre dos funciones g para las cuales

$$(f\circ g)(x)=x^2-4x+5$$

$$f(g(x))=(g(x))^2+2(g(x)+2=x^2-4x+5,$$

$$\Rightarrow\quad (g(x))^2+2(g(x)-(x^2-4x+3)=0,$$

$$\Rightarrow\quad g(x)=\frac{-2\pm\sqrt{2^2+4(x^2-4x+3)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4x^2-16x+12}}{2},$$

$$\Rightarrow\quad g(x)=\frac{-2\pm\sqrt{4x^2-16x+16}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{x^2-4x+4}}{2}=-1\pm\sqrt{(x-2)^2},$$

$$\Rightarrow\quad g(x)=-1\pm(x-2);$$

$$\Rightarrow\quad g(x)=-1+x-2\ \text{ y }\ g(x)=-1-x+2;$$

$\therefore$ Las funciones son $g(x)=x-3$ y $g(x)=-x+1$.

12. Solución:

$$g(z)=4^z\quad(1)$$

$$g(z+1)=4^{z+1}\quad(2)$$

$$g(z+1)-g(z)=3g(z)\quad(3)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3), se obtiene:

$$4^{z+1}-4^z=3\cdot4^z,$$

$$\Rightarrow\quad 4^z(4-1)=3\cdot4^z\quad\{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow\quad 4^z(3)=3\cdot4^z\quad\{\text{reduciendo}\};$$

$$\therefore\quad 3\cdot4^z=3\cdot4^z$$