Límites y continuidad

LÍMITES

El concepto de límite es la base fundamental con la que se construye el cálculo infinitesimal (diferencial e integral). Informalmente hablando se dice que el *límite* es el valor al que tiende una función cuando la variable independiente tiende a un número determinado o al infinito.

Definición de límite

Antes de establecer la definición formal del límite de una función en general vamos a observar qué sucede con una función particular cuando la variable independiente *tiende* (se aproxima) a un valor determinado.

Ejemplo:

Sea la función definida por $f(x) = x^2 - 1$.

En la tabla adjunta escribimos algunos valores para la variable independiente x, en el entorno de 2, y calculamos los valores correspondientes de la función $f(x)$:

x	$f(x)$
1.9	2.61
1.99	2.9601
1.999	2.996001
1.9999	2.99960001
2.0001	3.00040001
2.001	3.004001
2.01	3.0401
2.1	3.41

Cuando x se aproxima a 2, tanto por la izquierda como por la derecha, tomando valores menores o mayores que 2, $f(x)$ se aproxima, tiende, cada vez más a 3; y cuanto más cerca está x de 2, o lo que es lo mismo, cuando la diferencia en valor absoluto entre x y 2 es más pequeña asimismo la diferencia, en valor absoluto, entre $f(x)$ y 3 se hace cada vez más pequeña. (Estas diferencias se muestran en la tabla inferior derecha).

O sea, la función se acerca a un valor constante, 3, cuando la variable independiente se aproxima también a un valor constante.

	$\|x - 2\|$	$\|f(x) - 3\|$
	$\|1.9-2\| = 0.1$	$\|2.61-3\| = 0.39$
	$\|1.99-2\| = 0.01$	$\|2.9601-3\| = 0.0399$
	$\|1.999-2\| = 0.001$	$\|2.996001-3\| = 0.003999$
	$\|1.9999-2\| = 0.0001$	$\|2.99960001-3\| = 0.00039999$
	$\|2.0001-2\| = 0.0001$	$\|3.00040001-3\| = 0.00040001$
	$\|2.001-2\| = 0.001$	$\|3.004001-3\| = 0.004001$
	$\|2.01-2\| = 0.01$	$\|3.0401-3\| = 0.0401$
	$\|2.1-2\| = 0.1$	$\|3.41-3\| = 0.41$

De lo anterior se deduce intuitivamente que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a 2, es 3.
Ahora, pasamos a dar la definición formal de límite:

Definición épsilon-delta

Sea *f* una función definida en algún intervalo abierto que contenga a *a*. El límite de *f* (*x*) cuando *x* tiende a *a* es *L*, y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si el siguiente enunciado es verdadero:

Dada cualquier $\varepsilon > 0$, sin importar cuán pequeña sea, existe una $\delta > 0$, tal que

si $0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon$

Nota: no es necesario que *f* este definida en *a* para que el límite exista.

Ejercicios resueltos (aplicando la definición épsilon-delta) En los ejercicios 1 a 4, demuestre que el límite es el número indicado aplicando la definición Épsilon-delta:		
1. $\lim_{x\to 4}(2x+1) = 9$	2. $\lim_{x\to -1}(5x+8) = 3$	3. $\lim_{x\to 3}(7-3x) = -2$
4. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1} = -2$		

S o l u c i o n e s

1. Solución:

$$\lim_{x\to 4}(2x+1) = 9$$

Puesto que $2x+1$ está definido para cualquier número real, cualquier intervalo abierto que contenga a 4 cumplirá el primer requisito de la definición épsilon-delta. Ahora, se debe demostrar que

para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

si $0 < |x-4| < \delta \;\Rightarrow\; |(2x+1) - 9| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ si $0 < |x-4| < \delta \;\Rightarrow\; |2x-8| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ si $0 < |x-4| < \delta \;\Rightarrow\; 2|x-4| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ si $0 < |x-4| < \delta \;\Rightarrow\; |x-4| < \frac{1}{2}\varepsilon$

El último enunciado indica que es adecuado tomar $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$. Con esta elección de δ se establece el siguiente argumento:

$0 < |x-4| < \delta \;\rightarrow\; 2|x-4| < 2\delta \;\rightarrow\; |2x-8| < 2\delta \;\rightarrow\; |(2x+1)-9| < 2\delta$

$\rightarrow\; |(2x+1)-9| < \varepsilon \quad \{\text{ya que } \delta = \frac{1}{2}\varepsilon\}$

Así, se ha establecido que si $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$, el sigiente enunciado se cumple:

si $0 < |x-4| < \delta \;\Rightarrow\; |(2x+1)-9| < \varepsilon$

Esto demuestra que

$$\lim_{x\to 4}(2x+1) = 9.$$

2. Solución:

$$\lim_{x \to -1} (5x + 8) = 3$$

Puesto que $5x + 8$ está definido para cualquier número real, cualquier intervalo abierto que contenga a -1 cumplirá el primer requisito de la definición épsilon-delta. Ahora, se debe demostrar que

para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x + 1| < \delta \;\Rightarrow\; |(5x + 8) - 3| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } 0 < |x + 1| < \delta \;\Rightarrow\; |5x + 5| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } 0 < |x + 1| < \delta \;\Rightarrow\; 5|x + 1| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } 0 < |x + 1| < \delta \;\Rightarrow\; |x + 1| < \tfrac{1}{5}\varepsilon$$

El último enunciado indica que es adecuado tomar $\delta = \frac{1}{5}\varepsilon$. Con esta elección de δ se establece el siguiente argumento:

$$0 < |x + 1| < \delta \to 5|x + 1| < 5\delta \to |5x + 5| < 5\delta \to |(5x + 8) - 3| < 5\delta$$

$$\to \quad |(5x + 8) - 3| < \varepsilon \quad \{\text{ya que } \delta = \tfrac{1}{5}\varepsilon\}$$

Así, se ha establecido que si $\delta = \frac{1}{5}\varepsilon$, el sigiente enunciado se cumple:

$$\text{si } \; 0 < |x + 1| < \delta \;\Rightarrow\; |(5x + 8) - 3| < \varepsilon$$

Esto demuestra que

$$\lim_{x \to -1} (5x + 8) = 3.$$

3. Solución:

$$\lim_{x \to 3} (7 - 3x) = -2$$

Puesto que $7 - 3x$ está definido para cualquier número real, cualquier intervalo abierto que contenga a 3 cumplirá el primer requisito de la definición épsilon-delta. Ahora, se debe demostrar que

para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - 3| < \delta \;\Rightarrow\; |(7 - 3x) + 2| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } 0 < |x - 3| < \delta \;\Rightarrow\; |9 - 3x| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } 0 < |x - 3| < \delta \;\Rightarrow\; 3|x - 3| < \varepsilon \quad \{|3 - x| = |x - 3|\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } 0 < |x - 3| < \delta \;\Rightarrow\; |x - 3| < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

El último enunciado indica que es adecuado tomar $\delta = \frac{1}{3}\varepsilon$. Con esta elección de δ se establece el siguiente argumento:

$$0 < |x - 3| < \delta \to 3|x - 3| < 3\delta \to 3|3 - x| < 3\delta \to |9 - 3x| < 3\delta$$

$$\to \quad |(7 - 3x) + 2| < 3\delta \to |(7 - 3x) + 2| < \varepsilon \quad \{\text{ya que } \delta = \tfrac{1}{3}\varepsilon\}$$

Así, se ha establecido que si $\delta = \frac{1}{3}\varepsilon$, el sigiente enunciado se cumple:

$$\text{si } \; 0 < |x - 3| < \delta \;\Rightarrow\; |(7 - 3x) - (-2)| < \varepsilon$$

Esto demuestra que

$$\lim_{x \to 3} (7 - 3x) = -2.$$

4. Solución:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=-2$$

Factorizando el numerador y, luego, simplificando, el límite se transformaría en:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)}=\lim_{x\to -1}(x-1)=-2$$

Como $x-1$ está definido $\forall x\in\mathbb{R}$, cualquier intervalo abierto que contenga a -1 cumplirá con el primer requisito de la definición épsilon-delta.

Ahora, se debe demostrar que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ t.q:$$

$$\text{si}\quad 0<|x+1|<\delta\quad\Rightarrow\quad|(x-1)+2|<\varepsilon$$

$$\leftrightarrow\quad\text{si}\quad 0<|x+1|<\delta\quad\Rightarrow\quad|x+1|<\varepsilon$$

El último enunciado muestra que es adecuado tomar $\delta=\varepsilon$. Con esta elección de δ, se establece el siguiente argumento:

$$0<|x+1|\ \rightarrow\ |x+1+(1-1)|<\delta\ \rightarrow\ |(x-1)+2|<\delta\ \rightarrow\ |(x-1)+2|<\varepsilon$$

Así, se ha establecido que si $\delta=\varepsilon$, el siguiente enunciado se cumple:

$$\text{si}\quad 0<|x+1|<\delta\quad\Rightarrow\quad|(x-1)+2|<\varepsilon$$

Esto demuestra que

$$\lim_{x\to -1}(x-1)=-2,\text{ y por consiguiente que }\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=-2.$$

Teoremas de límites

Para facilitar la obtención del límite de una función sin tener que recurrir cada vez a la definición Épsilon-Delta se establecen los siguientes teoremas.
Los teoremas se numeran consecutivamente para facilitar una futura referencia.

Teorema de límite1:
Si k es una constante y a un número cualquiera, entonces

$$\lim_{x\to a}k=k$$

Teorema de límite2:
Para cualquier número dado a,

$$\lim_{x\to a}x=a$$

Teorema de límite3:
Si m y b son dos constantes cualesquiera, entonces

$$\lim_{x\to a}(mx+b)=ma+b$$

Teorema de límite4:

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces

(I) $\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = L \pm M$

(II) $\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = L\cdot M$

(III) $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{L}{M}$

(IV) $\lim_{x\to a}\left[k\,f(x)\right] = kL$, k es una constante

Teorema de límite5:

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y n es un entero positivo, entonces

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$$

Teorema de límite6:

Si f es un polinomio y a es un número real, entonces

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Teorema de límite7:

Si q es una función racional y a pertenece al dominio de q, entonces

$\lim_{x\to a} q(x) = q(a)$

Teorema de límite8:

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y n es un entero positivo, entonces

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \left[\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}\right] = \sqrt[n]{L}$$

Procedimiento para calcular límites

Si es posible aplicar directamente las propiedades anteriores, el límite se calcula directamente. Con respecto a las propiedades, como la propiedad 6 se aplica a cualquier polinomio y las propiedades 1, 2, 3, y 4 implican funciones polinómicas es indistinto que nos refiramos a cada una de las propiedades 1 a 4 en particular que a la propiedad 6 cuando calculamos el límite de una función polinómica. Lo mismo, la propiedad 7 se aplica a una función racional y la propiedad 4 (III) también.

Cuando al sustituir la *a* por *x* en la función nos da la forma indeterminada 0/0 es posible calcular el límite pero, previamente, hay que transformar la fórmula de la función de tal modo que, una vez hecha la simplificación pertinente, se pueda evitar la división por cero: para lograr esto disponemos de procedimientos algebraicos eficaces como la factorización, la conjugada, etc.

Ejercicios resueltos

Evalué los siguientes límites indicando la propiedad o propiedades que se aplican en cada paso:

1. $\lim_{x\to 3} 77$	**2.** $\lim_{x\to 5}(3x-7)$	**3.** $\lim_{x\to 2}(x^2+2x-1)$
4. $\lim_{x\to 3}\frac{4x-5}{5x-1}$	**5.** $\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{8x+1}{x+3}}$	**6.** $\lim_{x\to -3/2}\frac{4x^2-9}{2x+3}$
7. $\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-8x-16}{2x^2-9x+4}$	**8.** $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$	**9.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$
10. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$	**11.** $\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$	**12.** $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16}$

S o l u c i o n e s

1. Solución

De acuerdo con el Teorema de límite1

$$\lim_{x\to 3} 77 = 77$$

2. Solución:

$f(x) = 3x-7$: tiene la forma $mx+b$; por lo que aplicamos el Teorema de límite3

$$\lim_{x\to 5}(3x-7) = 3(5)-7 = 15-7;$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 5}(3x-7) = 8.$$

3. Solución:

$$f(x) = x^2+2x-1: \text{ función polinomial}$$

$$f(2) = 2^2+2(2)-1 = 7;$$

por lo tanto, según el Teorema de límite6:

$$\lim_{x\to 2}(x^2+2x-1) = 7.$$

4. Solución:

$$f(x) = \frac{4x-5}{5x-1};\ 3\in dom f,\ \text{y } f \text{ es una función racional}$$

Y $\quad f(3) = \frac{4(3)-5}{5(3)-1} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

por lo tanto, aplicando el Teorema de límite7, se concluye que

$$\lim_{x\to 3}\frac{4x-5}{5x-1} = \frac{1}{2}$$