

ECUACIONES E INECUACIONES

Encuentra un número tal que el doble de dicho número más 249 sea igual a cinco veces el propio número.

Gran cantidad de problemas prácticos en la vida real conducen a la resolución de una ecuación. Traducir al "lenguaje del álgebra" resulta imprescindible en estas ocasiones, el lenguaje algebraico nos sirve para expresar con precisión relaciones difíciles de transmitir con el lenguaje habitual. El ejemplo de la imagen se resuelve fácilmente con una ecuación:

$$2x + 249 = 5x$$

$$2x - 5x = -249$$

$$-3x = -249$$

$$x = 249/3 = 83$$



1. Ecuaciones

Elementos de una ecuación

En las ecuaciones distinguimos varios elementos:

- **Incógnita:** La letra (o variable) que figura en la ecuación.
- **Miembro:** Es cada una de las dos expresiones algebraicas separadas por el signo =.
- **Término:** Cada uno de los sumandos que componen los miembros de la ecuación.
- **Grado:** Es el mayor de los exponentes de las incógnitas, una vez realizadas todas las operaciones (reducir términos semejantes)

Solución de una ecuación

La **solución de una ecuación** es el valor de la incógnita que hace que la igualdad sea cierta.

- Si una ecuación tiene solución se llama **compatible**, si no tiene se dice **incompatible**.
- Dos ecuaciones que tienen las mismas soluciones se dicen que **equivalentes**.

Distingue los elementos de esta ecuación:

$$14x + (19x + 18) = x^2 + 7x + 1$$

Incógnita: x

Primer Miembro: $x + (19x+18)$

Segundo miembro: $x^2 + 7x + 1$

Términos: $14x, 19x, 18, x^2, 7x, 1$

Grado: 2

$x+2 = 9$ Solución $x=7$
 $7+2=9$ Es **compatible**

Un ecuación **equivalente**:

$$2x+4=18$$

Observa que para obtener una ecuación equivalente se han multiplicado los dos miembros por 2.

$$2(x+2) = 2 \cdot 9 \rightarrow 2x+4 = 18$$

2. Ecuaciones de primer grado

Solución

Una **ecuación de primer grado** con una incógnita es una igualdad algebraica que se puede expresar en la forma $ax+b=0$, con $a \neq 0$.

La **solución** de una ecuación del tipo $ax+b=c$ es:
 $x = -b/a$

Resolver: $-6x+4=15x$

Pasamos la x a la izquierda y lo que no tiene x a la derecha

$$-6x-15x=-4$$

Hacemos operaciones: $-21x=-4$

Despejamos la x : $x = -\frac{4}{21}$

Aplicaciones. Resolución de Problemas

Las ecuaciones de primer grado se aplican a la resolución de problemas.

Llamamos x al menor de los tres números.
Los números consecutivos son $x+1$, $x+2$

$$\begin{aligned} \text{La ecuación es: } & x+x+1+x+2=249 \\ \text{Resolvemos: } & 3x+3=249 \\ & 3x=246 \\ & x=246/3=82 \end{aligned}$$

La solución: Los números son **82, 83 y 84**

Halla tres números consecutivos cuya suma sea 249



EJERCICIOS resueltos

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \frac{-7x+5}{7} + \frac{9x-7}{8} = -1 \quad \text{Sol: } 56 \frac{-7x+5}{7} + 56 \frac{9x-7}{8} = 56(-1) \rightarrow 8(-7x+5) + 7(9x-7) = -56$$

$$-56x + 40 + 63x - 49 = -56 \rightarrow 7x = -47 \rightarrow x = \frac{-47}{7}$$

$$\text{b) } \frac{2x-(x+1)}{4} = \frac{5x+2}{6} \quad \text{Sol: } 12 \frac{x-1}{4} = 12 \frac{5x+2}{6} \rightarrow 3(x-1) = 2(5x+2)$$

$$3x-3 = 10x+4 \rightarrow -7x-7 \rightarrow x = \frac{7}{-7} = -1$$

$$\text{c) } \frac{3x-7(x+1)}{6} = \frac{2x-1}{3} - 2 \quad \text{Sol: } 6 \frac{3x-7(x+1)}{6} = 6 \frac{2x-1}{3} - 6 \cdot 2 \rightarrow 3x-7(x+1) = 2(2x-1) - 12$$

$$3x-7x-7 = 4x-2-12 \rightarrow -8x-7 \rightarrow x = \frac{7}{8}$$

$$\text{d) } \frac{2x-5}{3} - \frac{-2x+8}{7} = x \quad \text{Sol: } 21 \frac{2x-5}{3} - 21 \frac{-2x+8}{7} = 21x \rightarrow 7(2x-5) - 3(-2x+8) = 21x$$

$$14x-35+6x-24 = 21x \rightarrow -x = 59 \rightarrow x = -59$$

$$\text{e) } \frac{6x-(x-8)}{6} = \frac{-2x-17}{3} + x \quad \text{Sol: } 6 \frac{6x-(x-8)}{6} = 6 \frac{-2x-17}{3} + 6x \rightarrow 6x-(x-8) = 2(-2x-17) + 6x$$

$$5x+8 = -4x-34+6x \rightarrow 3x = -42 \rightarrow x = -14$$

2. La edad de un padre es el triple que la de su hijo, si entre los dos suman 56 años ¿Cuál es la edad de cada uno?

Edad del hijo: x
Sol: Edad del padre: $3x$
La edad del hijo es 14 años y la del padre es 42 años

$$x + 3x = 56 \rightarrow 4x = 56 \rightarrow x = \frac{56}{4} = 14$$

3. ¿Cuántos litros de vino de 5€ el litro deben mezclarse con vino de 3€ el litro para obtener 50 litros de vino cuyo precio sea de 4€ el litro?

Sol:

	litros	precio	
vino de 3€ el litro	x	$5x$	$5x + 3(50 - x) = 200 \rightarrow 2x = 50 \rightarrow x = 25$
vino de 4€ el litro	$50 - x$	$3(50 - x)$	
vino de 6€ el litro	50	200	

Hay que mezclar 25 litros de 5€ con vino de 3€

3. Ecuación de segundo grado

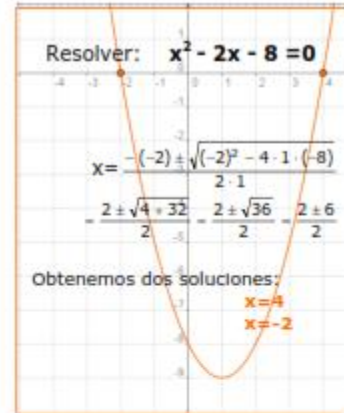
Solución

Las **ecuaciones de segundo grado** son de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para resolverlas empleamos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Ecuaciones incompletas

Cuando b, c ó los dos son 0 estamos ante una ecuación de segundo grado incompleta.

En estos casos no es necesario aplicar la fórmula sino que resulta más sencillo proceder de la siguiente manera:

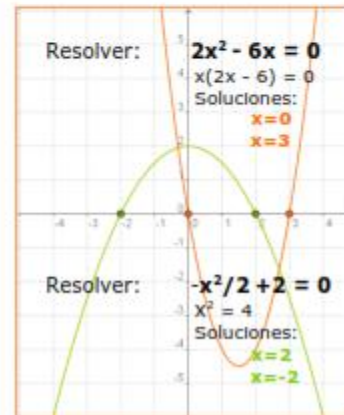
- Si $b=0$ $ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -c/a$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

- Si $-c/a > 0$ hay dos soluciones
- Si $-c/a < 0$ no hay solución

- Si $c=0$ $ax^2 + bx = 0$

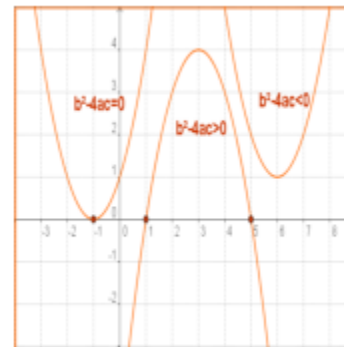
sacando x factor común : $x(ax+b)=0$
 $\Rightarrow x=0, x=-b/a$ son las dos soluciones.



Número de soluciones

Estas ecuaciones pueden tener dos soluciones, una o ninguna solución, según sea $b^2 - 4ac$, el llamado **discriminante**.

- $b^2 - 4ac > 0$ Hay dos soluciones.
- $b^2 - 4ac = 0$ Hay una solución doble: $x = -b/2a$
- $b^2 - 4ac < 0$ No hay solución.



Aplicaciones

Las ecuaciones de segundo grado se aplican a la resolución de problemas.

- Comienza por leer detenidamente el enunciado hasta asegurarte de que comprendes bien lo que se ha de calcular y los datos que te dan.
- Traduce al lenguaje algebraico las condiciones del enunciado y después resuelve la ecuación planteada.
- Una vez resuelta la ecuación da la solución al problema. Puede ocurrir que alguna solución no valga.

A continuación puedes ver algunos ejemplos:



EJEMPLO 1

- ✓ La suma de los cuadrados de dos números naturales es 313. ¿Cuáles son esos números?

SOLUCIÓN

Llamamos x al menor de los números.

El consecutivo es x+1

La ecuación es: $x^2 + (x + 1)^2 = 313$

Resolvemos:

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 313$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 313$$

$$2x^2 + 2x - 312 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 2496}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2500}}{4} = \frac{-2 \pm 50}{4} = \begin{cases} 12 \\ -13 \end{cases}$$

La solución es el número 12, (-13 no vale por no ser natural)

EJEMPLO 2

- ✓ En un parque nacional hay casetas forestales unidas cada una con todas las demás por un camino. Si el número de caminos es 28, ¿cuántas casetas hay?

SOLUCIÓN

x= nº casetas, de cada una salen x-1 caminos

Como entre caseta y caseta, el camino de ida es igual al de vuelta el número total de caminos es:

$$\frac{x(x-1)}{2} = 28 \Rightarrow x^2 - x = 56$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 56 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 224}}{2} = \frac{1 \pm 15}{2}$$

Obtenemos $x = -14/2 = -7$ y $x = 16/2 = 8$

La solución negativa no es válida ya que se trata de nº de casetas, luego hay 8 en el parque.



EJERCICIOS resueltos

4. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado completas:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ Sol: $x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$

b) $3x^2 + 17x + 20 = 0$ Sol: $x = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 240}}{6} = \frac{-17 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-17 \pm 7}{6} = \begin{cases} -5/3 \\ -4 \end{cases}$

c) $3x^2 + 5x + 4 = 0$ Sol: $x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 48}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{-23}}{6} = \text{No hay solución}$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $x^2 - 6x = 0$ Sol: $x(x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 6 = 0 \rightarrow x = 6 \end{cases}$

b) $x^2 + 27x = 0$ Sol: $x(x + 27) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 27 = 0 \rightarrow x = -27 \end{cases}$

c) $3x^2 + 5x = 0$ Sol: $x(3x + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 5 = 0 \rightarrow x = -5/3 \end{cases}$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $x^2 - 36 = 0$ Sol: $x^2 = 36 \rightarrow x = \pm\sqrt{36} \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -6 \end{cases}$

b) $4x^2 - 9 = 0$ Sol: $x^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$

c) $x^2 + 9 = 0$ Sol: $x^2 = -9 \rightarrow \text{No hay solución}$

7. Indica sin resolver cuántas soluciones tiene la ecuación: $x^2 + 7x - 11 = 0$

El discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ es, $7^2 - 4 \cdot 11 = 49 - 44 = 5 > 0$
 La ecuación tiene dos raíces distintas

8. Para construir una caja cúbica se han empleado 96 cm^2 de cartón. Determina la longitud de las aristas de la caja

x : Longitud de la arista
 Superficie del cubo: $6x^2 \rightarrow 6x^2 = 96 \rightarrow x^2 = \frac{96}{6} = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$
 La arista del cubo mide 4 cm

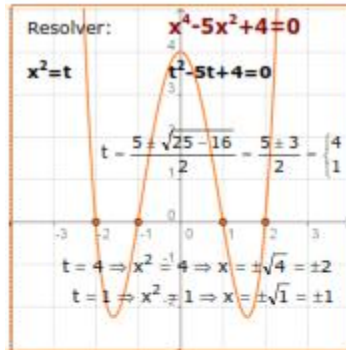
4. Otros tipos de ecuaciones

Ecuaciones bicuadradas

A las ecuaciones del tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$ se les llama bicuadradas.

Para resolverlas basta hacer $x^2 = t$, obteniendo una ecuación de segundo grado: $at^2 + bt + c = 0$, en la que

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{t_1} \\ x = \pm\sqrt{t_2} \end{cases}$$



$$(x-2)(2x+3)=0$$

Se iguala a cero cada factor

Resolvemos:

$$\begin{aligned} x - 2 = 0 &\rightarrow x = 2 \\ 2x - 3 = 0 &\rightarrow x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Tipo $(x-a) \cdot (x-b) \cdot \dots = 0$

Para calcular la solución de este tipo de ecuaciones, factorizadas, se igualan a cero cada uno de los factores y se resuelven las ecuaciones resultantes.

$$(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) = 0$$

$$\begin{aligned} x-a=0 &\rightarrow x=a \\ x-b=0 &\rightarrow x=b \\ x-c=0 &\rightarrow x=c \end{aligned}$$

EJERCICIOS resueltos

9. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

$$x^2 = t$$

$$t^2 - 25t + 144 = 0$$

$$t = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} 16 \Rightarrow x = \pm 4 \\ 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

b) $x^4 + 9x^2 - 162 = 0$

$$x^2 = t$$

$$t^2 + 9t - 162 = 0$$

$$t = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 648}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{-9 \pm 27}{2} = \begin{cases} -18 \Rightarrow \text{Sin sol} \\ 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

c) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$

$$x^2 = t$$

$$t^2 - 8t + 15 = 0$$

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \\ 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

d) $x^4 + 9x^2 + 14 = 0$

$$x^2 = t$$

$$t^2 + 9t + 14 = 0$$

$$t = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-9 \pm 5}{2} = \begin{cases} -2 \Rightarrow \text{Sin sol} \\ -7 \Rightarrow \text{Sin sol} \end{cases}$$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x-2)(x+3) = 0$ Sol: $x-2=0 \rightarrow x=2$; $x+3=0 \rightarrow x=-3$

b) $(3x-1)(x-5) = 0$ Sol: $3x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{3}$; $x-5=0 \rightarrow x=5$

c) $(3x-2)(x+6) = 0$ Sol: $3x-2=0 \rightarrow x=\frac{2}{3}$; $x+6=0 \rightarrow x=-6$

d) $(3x+1)(7x-5) = 0$ Sol: $3x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{3}$; $7x-5=0 \rightarrow x=\frac{5}{7}$

5. Inecuaciones con una incógnita

Definición. Solución.

Dos expresiones algebraicas separadas por los signos $<$, $>$, \leq , \geq forman una **inecuación**.

La solución de una inecuación son todos los puntos que cumplen la desigualdad. La solución de una ecuación siempre va a ser un conjunto de puntos, un intervalo.

Propiedades.

- Al sumar o restar la misma cantidad a los dos miembros de una inecuación la desigualdad no varía.
- Al multiplicar o dividir los dos miembros de una inecuación por un mismo número positivo, la desigualdad no varía.
- Al multiplicar o dividir los dos miembros de una inecuación por un mismo número negativo, el sentido de la desigualdad cambia.

Comprobemos las propiedades

$$63 > 9$$

1. Sumo 10 a los dos miembros, queda:

$$73 > 19$$

que sigue siendo cierto.

2. Multiplico por 10 a los dos miembros, queda:

$$630 > 190$$

que sigue siendo cierto.

3. Multiplico por -1 los dos miembros, queda: $-63 > -9$, que no es cierto, para qué lo sea cambio el sentido de la desigualdad.

$$-63 < -9$$

Resolver la inecuación: $3x + 1 < 7$

$$3x < 6$$

$$x < 2$$

$$\text{sol: } (-\infty, 2)$$



$$\begin{aligned}
 x < a &\rightarrow \text{sol: } (-\infty, a) \\
 x \leq a &\rightarrow \text{sol: } (-\infty, a] \\
 x > a &\rightarrow \text{sol: } (a, +\infty) \\
 x \geq a &\rightarrow \text{sol: } [a, +\infty)
 \end{aligned}$$

Inecuaciones de segundo grado

Una **inecuación de segundo grado** con una incógnita es una desigualdad algebraica que se puede expresar en la forma

$$ax^2 + bx + c < 0$$

con $a \neq 0$, y a, b, c números reales.

Para resolverla, se hallan las raíces de la ecuación x_1 y x_2 . La solución, si tiene, será algunos o algunos de los intervalos $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) , $(x_2, +\infty)$ con $x_1 < x_2$

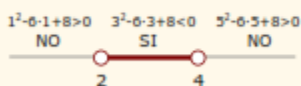
Para saber si un intervalo es de la solución se coge un punto interior a él y se comprueba si verifica la desigualdad, si la verifica es de la solución.

Resolver la inecuación:

$$x^2 - 6x + 8 < 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\text{Raíces } x=2, x=4$$



La solución es $(2, 4)$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Obtén la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{3} = 1$

b) $\frac{x-3}{2} - 3(x+2) = -20$

c) $\frac{2-2(x-3)}{2} - \frac{x+4}{4} = 3$

d) $\frac{4(x+1)}{2} + x - \frac{x+3}{3} = 5 + 3(x-2)$

2. Resuelve las ecuaciones:

a) $-6x^2 - 7x + 155 = -8x$

b) $3x^2 + 8x + 14 = -5x$

c) $(x-6)(x-10) = 60$

d) $(x+10)(x-9) = -78$

3. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$

b) $x^4 + 14x^2 - 72 = 0$

c) $x^4 - 81 = 0$

d) $(x^2 - 8)(x^2 - 1) = 8$

4. Resuelve las ecuaciones:

a) $(x+3)(2x-5) = 0$

b) $(5x+3)(2x-8) = 0$

c) $(x-2)(2-3x)(4+x) = 0$

d) $x(x+3)(2x+1) = 0$

5. Resuelve las Inecuaciones:

a) $3(x-1)+2x < x+1$

b) $2 - 2(x-3) \geq 3(x-3) - 8$

c) $2(x+3)+3(x+1) > 24$

d) $3x \leq 12 - 2(x+1)$

6. Resuelve las Inecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 6 < 0$

b) $-2x^2 + 18x - 36 > 0$

c) $x^2 + 2x - 8 \geq 0$

d) $3x^2 - 18x + 15 \leq 0$

7. Encuentra dos números consecutivos que sumen 71

8. Encuentra un número tal que sumado con su triple sea igual a 100

9. ¿Qué edad tengo ahora si dentro de 12 años tendré el triple de la edad que tenía hace 8 años?

10. Juan tiene 12 años menos que María, dentro de 4 años María tendrá el triple de la edad de Juan ¿cuántos años tienen ahora?

11. Para vallar una parcela rectangular de 240 m² se emplean 62 m de cerca. ¿Qué dimensiones tiene la parcela?.

12. La diferencia de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 25, ¿cuáles son?.

13. Al sumar una fracción de denominador 3 con su Inversa se obtiene 109/30, ¿cuál es la fracción?.

14. El cuadrado de un número más 6 es igual a 5 veces el propio número, ¿qué número es?.

15. Busca un número positivo tal que 6 veces su cuarta potencia más 7 veces su cuadrado sea igual a 124.

16. Encuentra m para que $x^2 - mx + 121 = 0$ tenga una solución doble.