

Titulo: ***DOMINIO Y RANGO
DE UNA FUNCIÓN***

Año escolar: 4to. Año de Bachillerato
Autor: José Luis Albornoz Salazar
Ocupación: Ing Civil. Docente Universitario
País de residencia: Venezuela
Correo electrónico: martilloatomico@gmail.com

<i>INDICE</i>	<i>Página</i>
<i>Funciones Polinómicas</i>	1
<i>Funciones Racionales</i>	3
<i>Funciones Irracionales</i>	6
<i>Funciones Exponenciales</i>	8
<i>Funciones Logarítmicas</i>	9
<i>Funciones Combinadas (Racionales – Irracionales)</i>	10

El autor de este trabajo solicita su valiosa colaboración en el sentido de enviar cualquier sugerencia y/o recomendación a la siguiente dirección :

martilloatomico@gmail.com

Igualmente puede enviar cualquier ejercicio o problema que considere pueda ser incluido en el mismo.

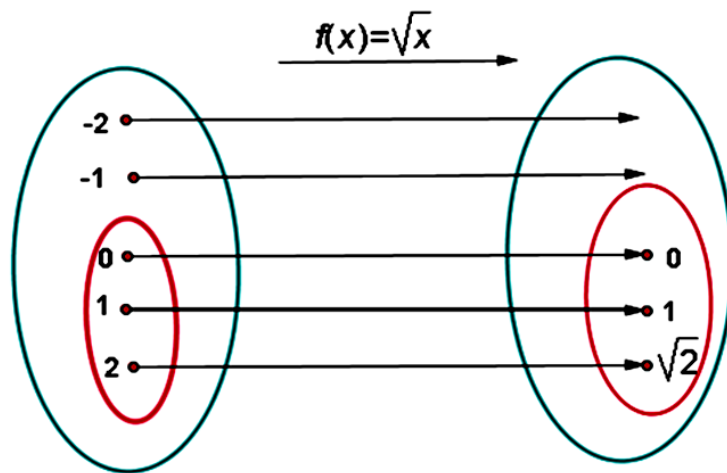
Si en sus horas de estudio o práctica se encuentra con un problema que no pueda resolver, envíelo a la anterior dirección y se le enviará resuelto a la suya.

DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

Función: Una función entre dos conjuntos numéricos es una correspondencia tal que a cada número del conjunto de partida le corresponde una sola imagen del conjunto de llegada.

Así, en la figura siguiente podemos observar gráficamente el comportamiento de la función raíz cuadrada de un número.

Del lado izquierdo observamos el conjunto de partida (representado por los valores que le asignemos a la variable independiente "X"), del lado derecho observamos el conjunto de llegada (representado por los valores que toma la variable dependiente "Y" una vez que se extrae la raíz cuadrada del valor que se le asignó a "X") y sobre la flecha está indicada la relación matemática (función) que transforma los valores del conjunto de partida en los valores del conjunto de llegada (imagen).



Dominio de una función : Es el conjunto formado por los elementos que tienen imagen. Los valores que le damos a "X" (variable independiente) forman el conjunto de partida. Gráficamente lo miramos en el eje horizontal (abscisas), leyendo como escribimos de izquierda a derecha.

El dominio de una función está formado por aquellos valores de "X" (números reales) para los que se puede calcular la imagen f(x).

En la gráfica anterior notamos que si le asignamos los valores "-2" y "-1" a la "X" estos no tienen imagen, por lo tanto no pertenecen al dominio de la función estudiada. Esto es lógico ya que los números negativos no tienen raíces reales sino raíces imaginarias.

Rango de una función: Es el conjunto formado por las imágenes. Son los valores que toma la función "Y" (variable dependiente), por eso se denomina "f(x)", su valor depende del valor que le demos a "X". Gráficamente lo miramos en el eje vertical (ordenadas), leyendo de abajo a arriba.

El Rango de una función es el conjunto formado por las imágenes f(x) de los valores de "X" que pertenecen al Dominio de dicha función.

La manera más efectiva para determinar el Rango consiste en graficar la función y ver los valores que toma "Y" de abajo hacia arriba.

CÁLCULO DEL DOMINIO Y RANGO DE FUNCIONES

Vamos a calcular de forma numérica y gráfica el dominio y rango de varias funciones para fijar los conceptos anteriores.

FUNCIONES POLINÓMICAS:

Aquellas funciones cuya expresión algebraica es un polinomio, es decir, las funciones polinómicas, tienen como dominio todo el conjunto de los números reales: \mathbf{R} , puesto que a partir de una expresión polinómica, se puede sustituir el valor de "X" por cualquier número real que hayamos elegido y se puede calcular sin ningún problema el número real imagen "Y".

Son funciones polinómicas : La recta (función lineal o afin), la parábola (función de segundo grado) y los polinomios de grado superior.

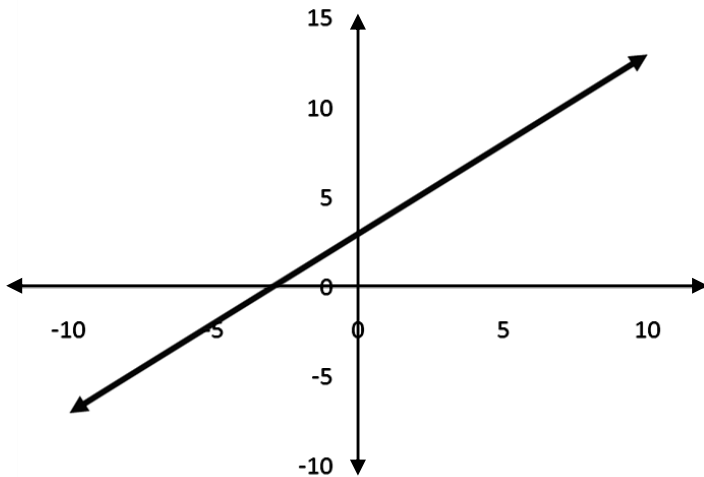
Dom f(x) = \mathbf{R} también se puede expresar \Rightarrow Dom f(x) = $(-\infty, \infty)$

EJERCICIO 1 : Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = X + 3$$

Como es una función lineal el dominio será todo el conjunto de los números reales.

$$\text{Dom } f(x) = \mathbf{R}$$



El Rango será todo el conjunto de los números reales. Seguimos el eje "Y" de abajo hacia arriba y podemos leer valores siempre.

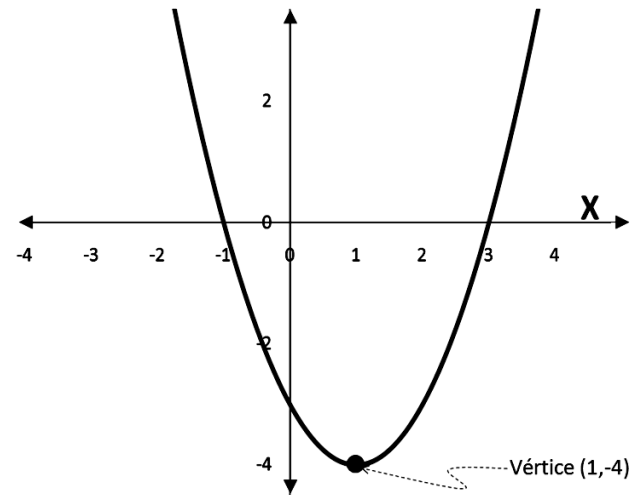
$$\text{Rango} = (-\infty, +\infty)$$

EJERCICIO 2 : Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = X^2 - 2X - 3$$

Como es una función polinómica de segundo grado el dominio será todo el conjunto de los números reales.

$$\text{Dom } f(x) = \mathbf{R}$$



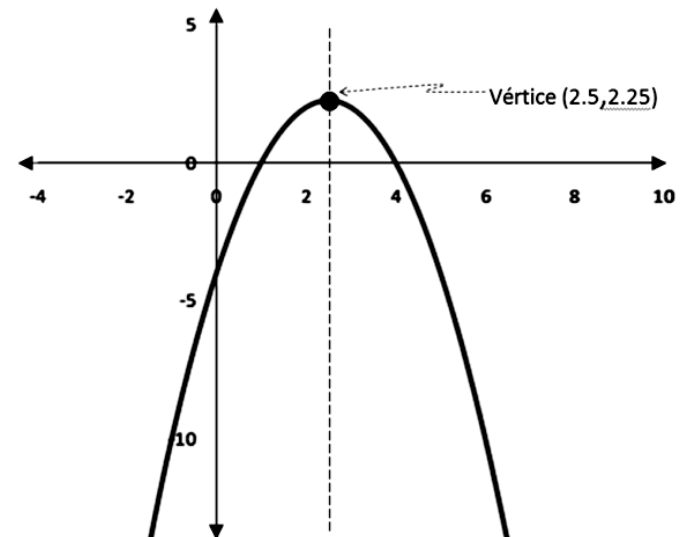
El eje "Y" empieza a tomar valores (de abajo hacia arriba) a partir de -4.

$$\text{Rango} = [-4, +\infty)$$

EJERCICIO 3 : Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = -X^2 + 5X - 4$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbf{R}$$



El eje "Y" empieza a tomar valores (de abajo hacia arriba) desde menos infinito y llega hasta el vértice de la parábola (hasta Y = 2,25).

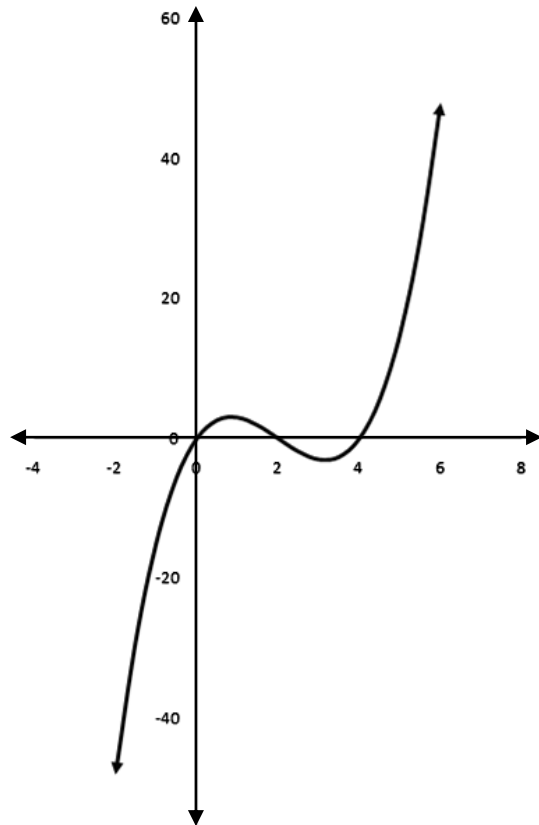
$$\text{Rango} = (-\infty, 2.25]$$

EJERCICIO 4 : Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = X^3 - 6X^2 + 8X$$

Como es una función polinómica de tercer grado el dominio será todo el conjunto de los números reales.

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$



El Rango será todo el conjunto de los números reales. Seguimos el eje "Y" de abajo hacia arriba y podemos leer valores siempre.

$$\text{Rango} = (-\infty, +\infty)$$

FUNCIONES RACIONALES :

Para calcular el dominio de este tipo de funciones el primer paso es igualar el denominador a cero y resolver esa ecuación, una vez resuelta esa ecuación el dominio estará formado por todos los reales excepto las soluciones de la ecuación.

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{\text{los valores de } x \text{ que me anulan el denominador (si los hay)}\}$$

EJERCICIO 5 : Determinar Dominio y Rango de

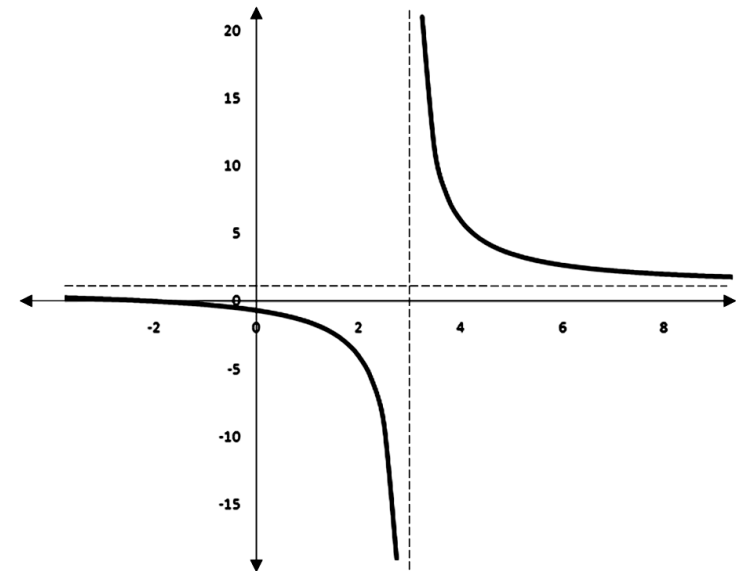
$$f(x) = \frac{X+2}{X-3}$$

Igualando el denominador a cero :

$$X - 3 = 0 \quad ; \quad X = 3$$

El dominio estará formado por todos los reales excepto el número 3.

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{3\} \quad ; \quad (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$



Esta gráfica presenta una asíntota horizontal en "Y = 1", Luego la función estará definida en todos los valores de Y menos en "Y = 1".

$$\text{Rango} = \mathbb{R} - \{1\} \quad ; \quad (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

EJERCICIO 6 : Determinar Dominio y Rango de

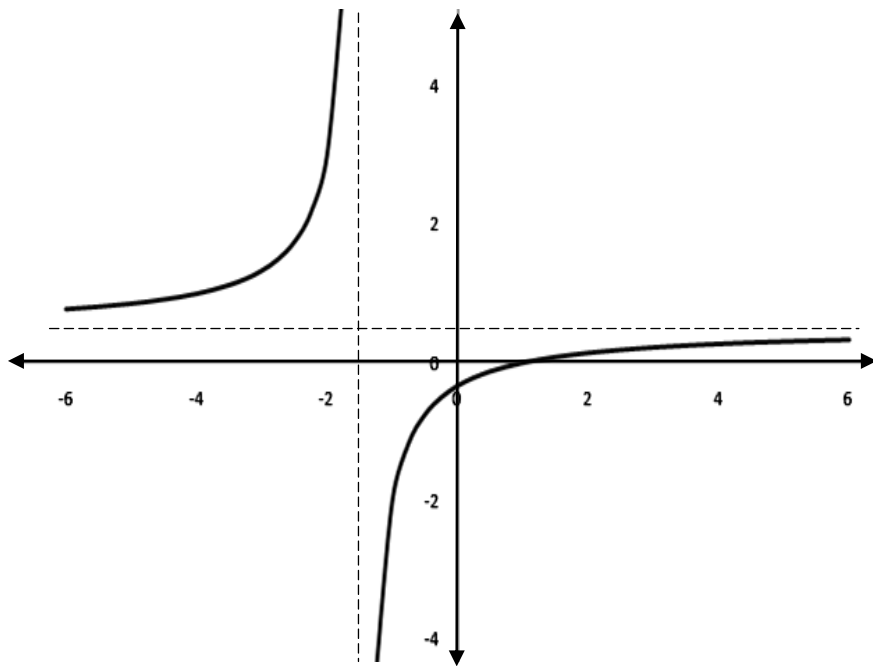
$$f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$$

Igualando el denominador a cero :

$$2x + 3 = 0 \quad ; \quad 2x = -3 \quad ; \quad Y = \frac{-3}{2} = -1,5$$

El dominio estará formado por todos los reales excepto el número -1,5.

$$\text{Dom } f(x) = \mathbf{R - \{-1.5\}} \quad ; \quad (-\infty, -1.5) \cup (-1.5, +\infty)$$



Esta gráfica presenta una asíntota horizontal en $Y = \frac{1}{2}$. Luego la función estará definida en todos los valores de Y menos en $Y = \frac{1}{2}$.

$$\text{Rango} = \mathbf{R - \left\{ \frac{1}{2} \right\}} \quad ; \quad \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Dominio y Rango de una Función

EJERCICIO 7 : Determinar Dominio y Rango de

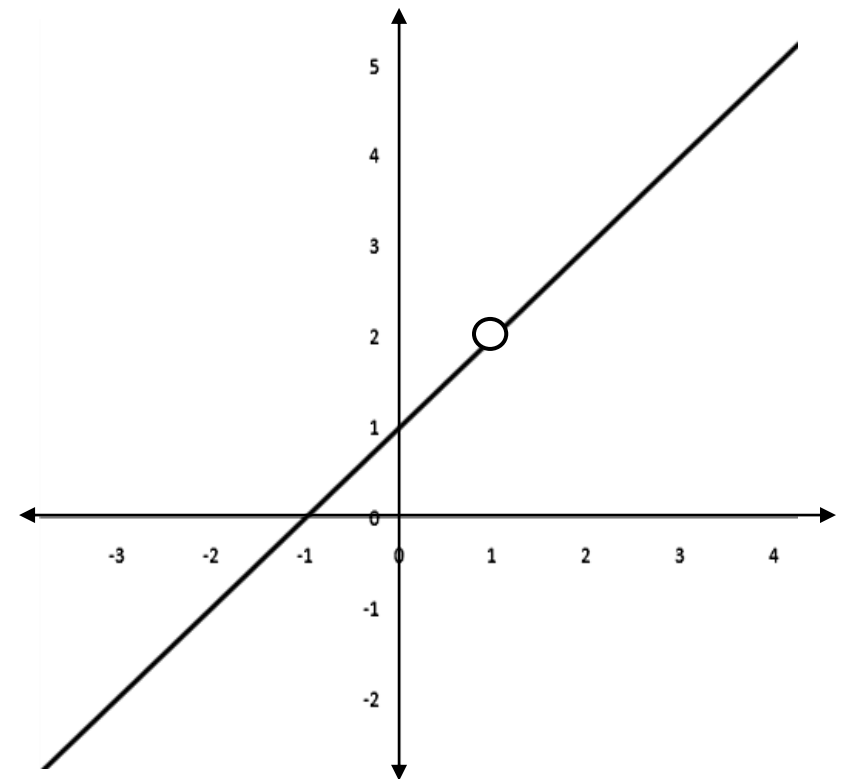
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Igualando el denominador a cero :

$$x - 1 = 0 \quad ; \quad \mathbf{x = 1}$$

El dominio estará formado por todos los reales excepto el número 1.

$$\text{Dom } f(x) = \mathbf{R - \{1\}} \quad ; \quad (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$



Esta gráfica presenta un "huevo" en "Y = 2", Luego la función estará definida en todos los valores de Y menos en "Y = 2".

$$\text{Rango} = \mathbf{R - \{2\}} \quad ; \quad (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

Ing. José Luis Alborno Salazar - 4 -

EJERCICIO 8 : Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = \frac{4x^2 + 4}{2x^2 - 8}$$

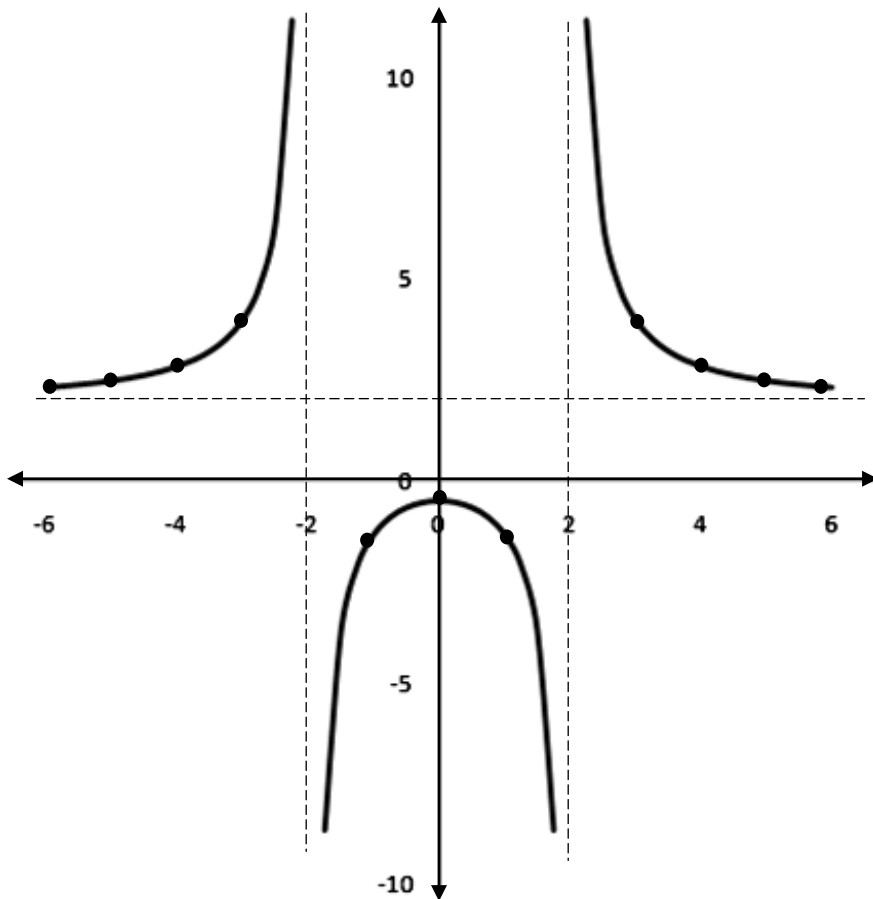
Igualando el denominador a cero :

Las raíces del polinomio $2x^2 - 8$ son : $x = 2$ y $x = -2$

Estas raíces las puede obtener aplicando la fórmula general de segundo grado o el método de factorización que te sea más cómodo.

El dominio estará formado por todos los reales excepto los números "2" y "-2"

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} \quad ; \quad (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$$



X	-6	-5	-4	-3	-1	0	1	3	4	5	6
Y	2,31	2,47	2,83	4	-1,33	-0,5	-1,33	4	2,83	2,47	2,31

La gráfica presenta una asíntota horizontal en "Y = 2", pero además podemos notar que la curva que está debajo del eje "X" corta al eje "Y" en el punto (0,-0.5). Luego el Rango será :

$$\text{Rango} = (-\infty, -0.5] \cup (2, +\infty)$$

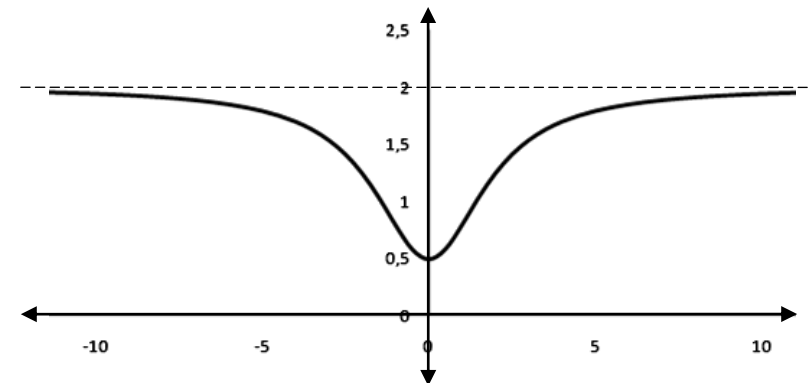
Verifique que los valores de "Y" entre "Y = -0.5" y "Y = 2" no están señalados en la gráfica, por lo tanto no pertenecen al Rango.

EJERCICIO 9 : Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = \frac{4x^2 + 4}{2x^2 + 8}$$

Al igualar el denominador a cero puedo notar que el polinomio $2x^2 + 8$ no tiene raíces reales, luego no existen valores que anulen al denominador y el Dominio estará representado por todos los números reales.

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$



La gráfica presenta una asíntota horizontal en "Y = 2", pero además podemos notar que la curva corta al eje "Y" en el punto (0,0.5). Luego el Rango será :

$$\text{Rango} = [0.5, 2)$$

EJERCICIO 10 : Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = \frac{X^3 + 3X^2 + 2X}{X^2 + 3x + 2}$$

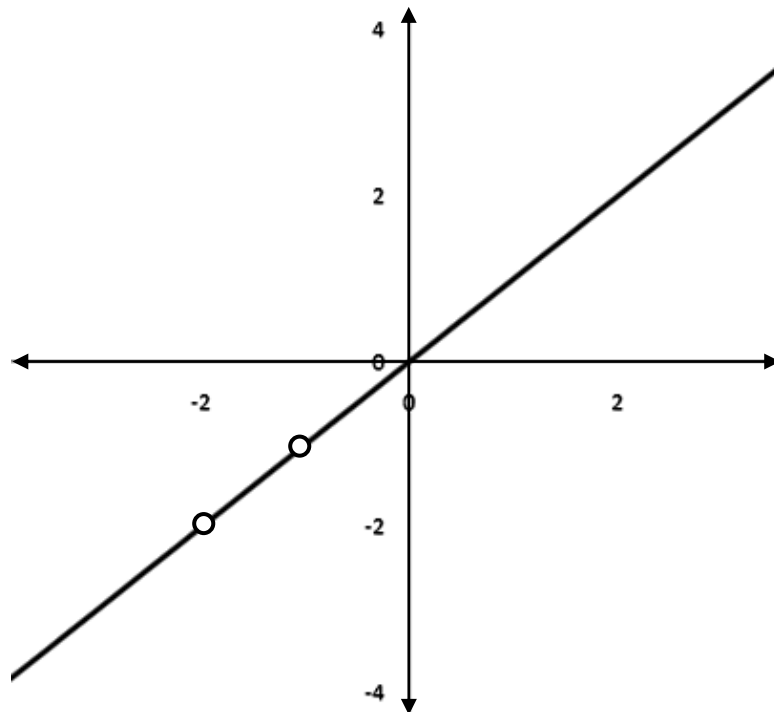
Igualando el denominador a cero :

Las raíces del polinomio $X^2 + 3x + 2$ son : $X = -2$ y $X = -1$

Estas raíces las puede obtener aplicando la formula general de segundo grado o el método de factorización que te sea más cómodo.

El dominio estará formado por todos los reales excepto los números “-2” y “-1”

$$\text{Dom } f(x) = \mathbf{R - \{-2,-1\}} \quad ; \quad (-\infty, -2) \cup (-2,-1) \cup (-1, +\infty)$$



$$\text{Rango} = (-\infty, -2) \cup (-2,-1) \cup (-1, +\infty)$$

FUNCIONES IRRACIONALES :

Funciones irracionales son las que vienen expresadas a través de un radical que lleve en su radicando la variable independiente.

Si el radical tiene índice impar, entonces el dominio será todo el conjunto **R de los números reales** porque al elegir cualquier valor de X siempre vamos a poder calcular la raíz de índice impar de la expresión que haya en el radicando.

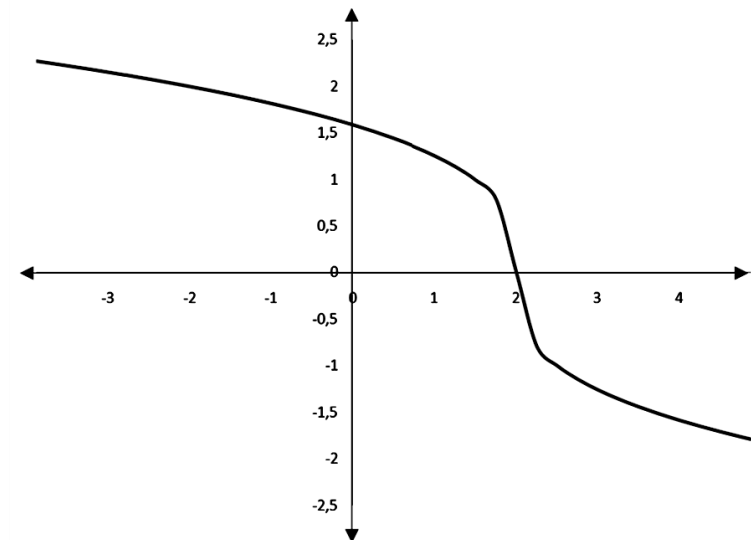
Pero si el radical tiene índice par, para los valores de X que hagan el radicando negativo no existirá la raíz y por tanto no tendrán imagen. Cuando queremos hallar el dominio de este tipo de funciones lo primero que debemos hacer es tomar lo que hay dentro de la raíz y hacer que sea mayor o igual que cero. A continuación se resuelve esa inecuación y la solución de dicha inecuación conforma el dominio de la función.

EJERCICIO 11 : Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = \sqrt[3]{-2X + 4}$$

Raíz de índice impar :

$$\text{Dom } f(x) = \mathbf{R}$$



$$\text{Rango} = \mathbf{R}$$

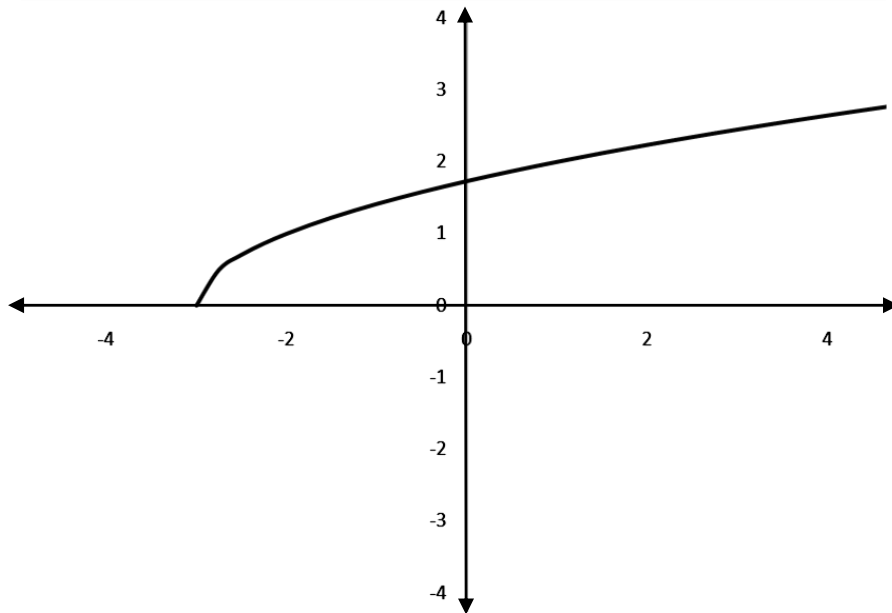
EJERCICIO 12 : Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = \sqrt{x + 3}$$

Quando queremos hallar el dominio de este tipo de funciones lo primero que debemos hacer es tomar lo que hay dentro de la raíz y hacer que sea mayor o igual que cero. A continuación se resuelve esa inecuación y la solución de dicha inecuación conforma el dominio de la función.

$$x + 3 \geq 0 \quad ; \quad x \geq -3$$

$$\text{Dom } f(x) = [-3, +\infty)$$



$$\text{Rango} = [0, +\infty)$$

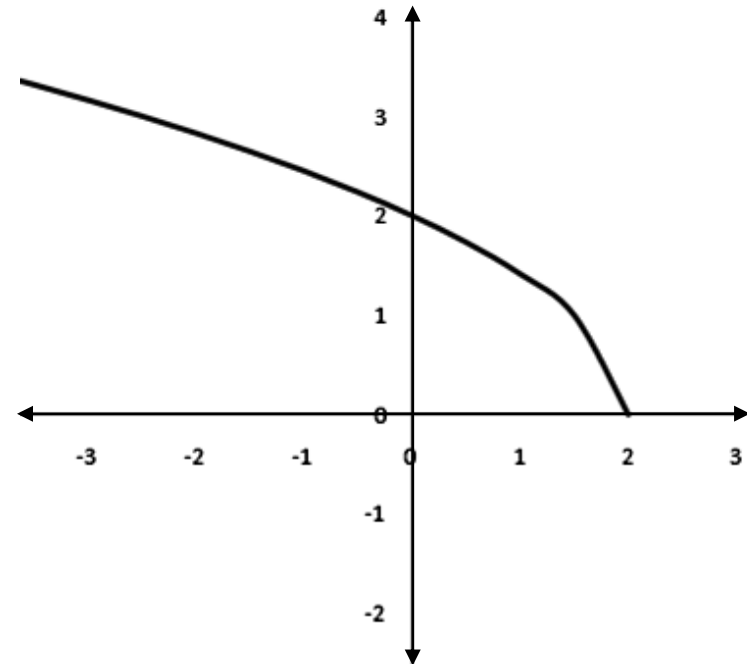
EJERCICIO 13 : Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = \sqrt{-2x + 4}$$

Quando queremos hallar el dominio de este tipo de funciones lo primero que debemos hacer es tomar lo que hay dentro de la raíz y hacer que sea mayor o igual que cero. A continuación se resuelve esa inecuación y la solución de dicha inecuación conforma el dominio de la función.

$$-2x + 4 \geq 0 \quad ; \quad -2x \geq -4 \text{ por menos uno} \quad ; \quad 2x \leq 4 \quad ; \quad x \leq 2$$

$$\text{Dom } f(x) = (-\infty, 2]$$



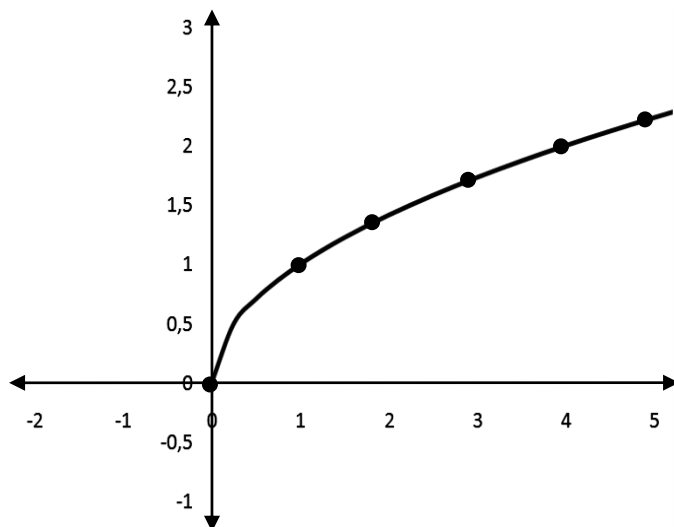
$$\text{Rango} = [0, +\infty)$$

EJERCICIO 14 : Dominio y Rango $f(x) = \sqrt{x}$

$x \geq 0$

Dom $f(x) = [0, +\infty)$

X	Y
0	0
1	1
2	1,41
3	1,73
4	2
5	2,24

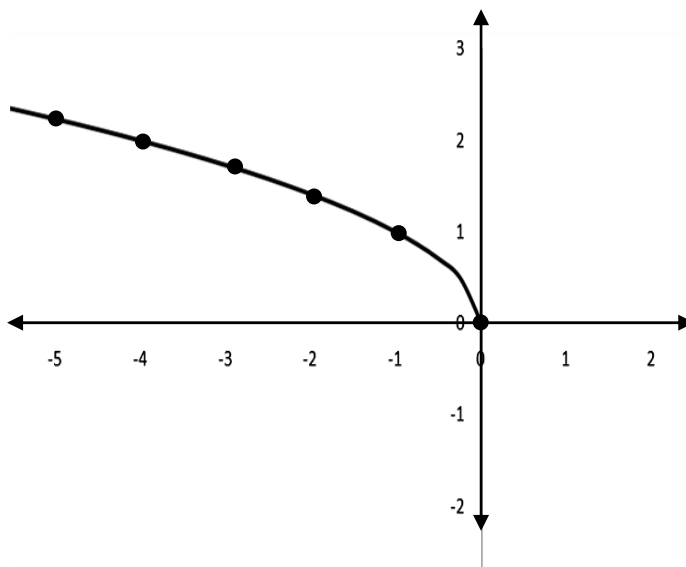


Rango = $[0, +\infty)$

EJERCICIO 15 : Dominio y Rango $f(x) = \sqrt{-x}$

$-x \geq 0 ; x \leq 0$

Dom $f(x) = (-\infty, 0]$



X	Y
0	0
-1	1
-2	1,41
-3	1,73
-4	2
-5	2,24

Rango = $[0, +\infty)$

FUNCIONES EXPONENCIALES :

Son aquellas funciones del tipo $f(x) = a^x$ donde "a" debe ser un número mayor que cero y distinto de 1... ($a > 0 ; a \neq 1$)

Todas las funciones exponenciales tienen como Dominio todos los números reales.

Dom $f(x) = \mathbb{R}$

Todas las funciones exponenciales tienen como Rango todos los números reales positivos sin incluir el cero.

Rango = $(0, +\infty)$

Tomando en cuenta lo indicado anteriormente no es necesario realizar ningún análisis para determinar el Dominio y Rango de una función exponencial.

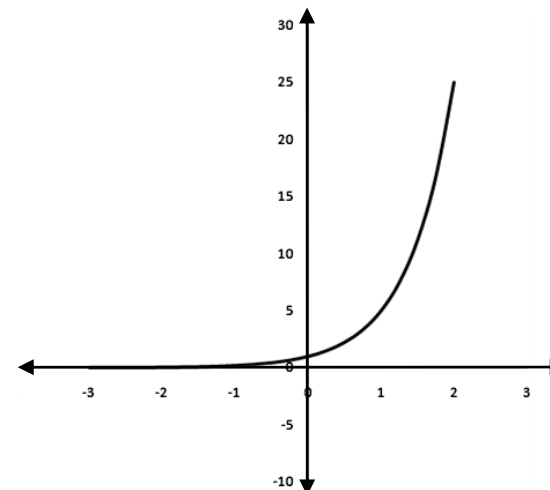
Al detectar que es una función exponencial, podemos afirmar inmediatamente que :

Dom $f(x) = \mathbb{R}$

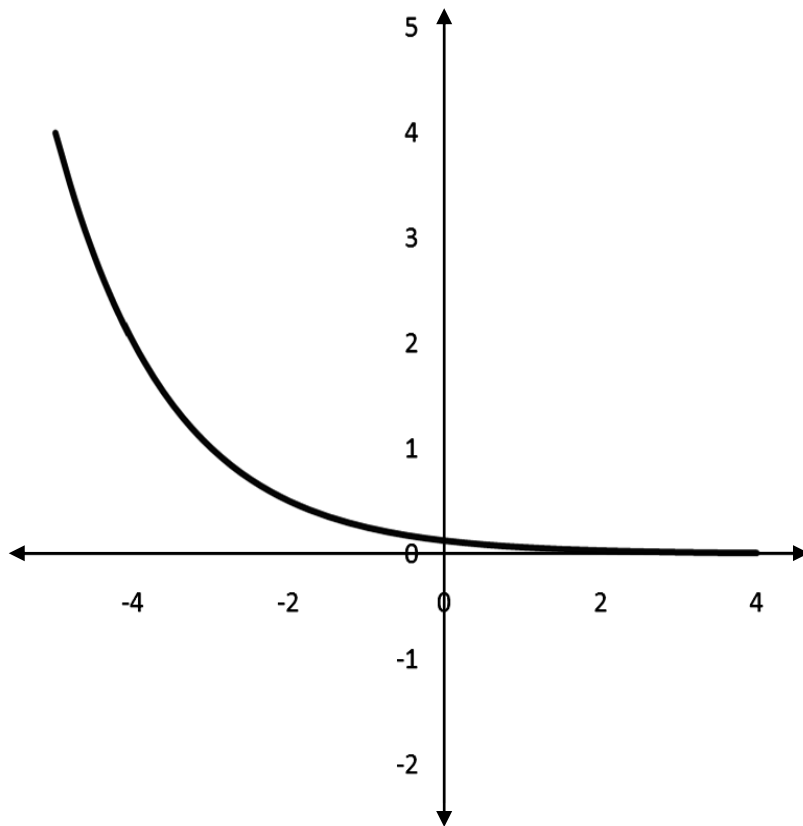
Rango = $(0, +\infty)$

Vamos a graficar dos funciones exponenciales para sustentar lo apuntado anteriormente:

$f(x) = 5^x$



$$f(x) = (0,5)^{x+3}$$



FUNCIONES LOGARÍTMICAS :

Los logaritmos de números negativos y el de 0 no existen. Luego, todas las expresiones a las que se le pretenda calcular su logaritmo deben ser mayores a cero.

El procedimiento para calcular su dominio es bastante similar al de las funciones irracionales. Tomamos lo que hay dentro del logaritmo y hacemos que sea mayor que cero. A continuación resolvemos la inecuación y la solución nos da el dominio.

El Rango estará representado por el conjunto de todos los números reales.

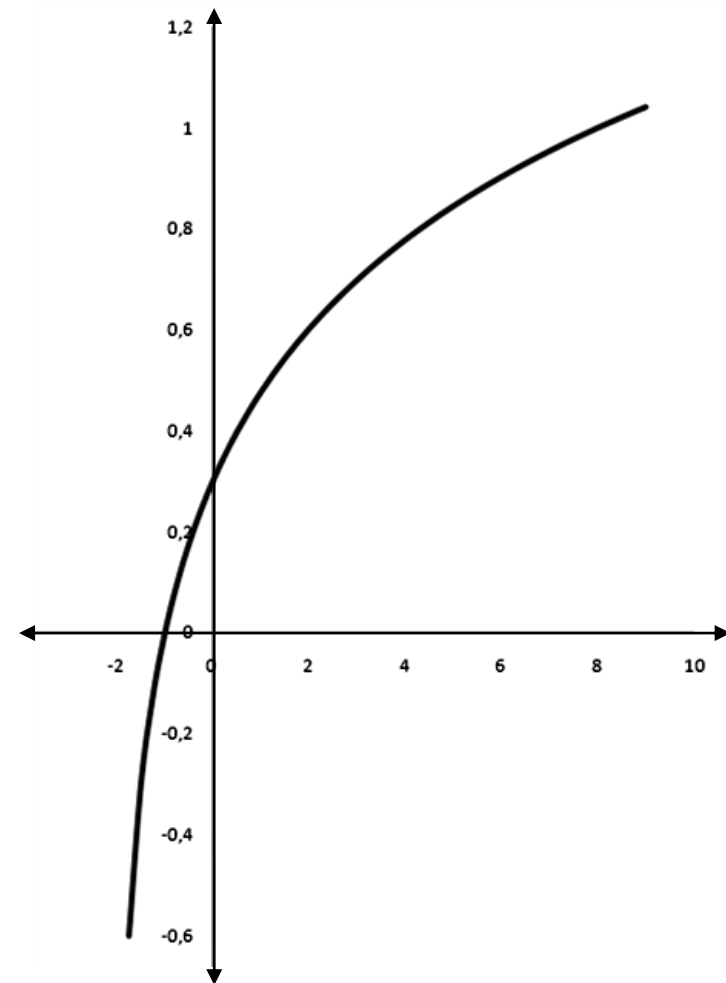
EJERCICIO 16 : Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = \log(X + 2)$$

Tomamos lo que hay dentro del logaritmo y hacemos que sea mayor que cero. A continuación resolvemos la inecuación y la solución nos da el dominio.

$$X + 2 > 0 \quad ; \quad X > -2$$

$$\text{Dom } f(x) = (-2, +\infty)$$



$$\text{Rango} = \mathbf{R}$$

EJERCICIO 17 : Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = \log (X^2 - 4)$$

Tomamos lo que hay dentro del logaritmo y hacemos que sea mayor que cero. A continuación resolvemos la inecuación y la solución nos da el dominio.

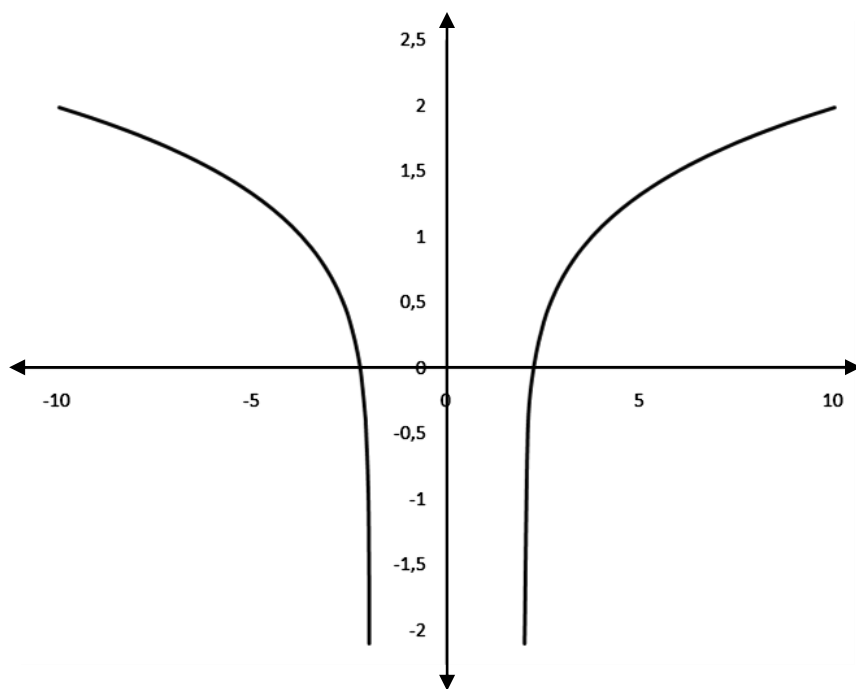
$$X^2 - 4 > 0 \quad ; \quad X^2 > 4$$

Al recordar lo aprendido en INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO O CUADRÁTICAS, los valores que cumplen con ella serán ;

$$X = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Luego el dominio también será :

$$\text{Dom } f(x) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$



Rango = \mathbf{R}

FUNCIONES COMBINADAS
(RACIONALES - IRRACIONALES) :

EJERCICIO 18 : Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = \frac{\sqrt{X+5}}{X+3}$$

Se nos presenta una función racional que en el numerador posee una función irracional.

Para determinar el Dominio debemos analizar por separado el numerador y el denominador.

Analizando el numerador :

Como el numerador es una raíz de índice par, la cantidad sub-radical o radicando tiene que ser mayor o igual a cero

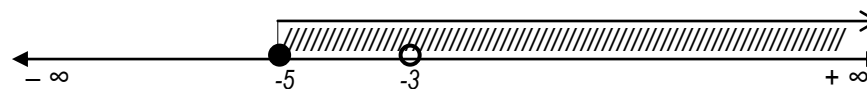
$$X + 5 \geq 0 \quad ; \quad X \geq -5$$

Analizando el denominador :

Como la división por cero no existe, el denominador nunca puede ser igual a cero. Luego :

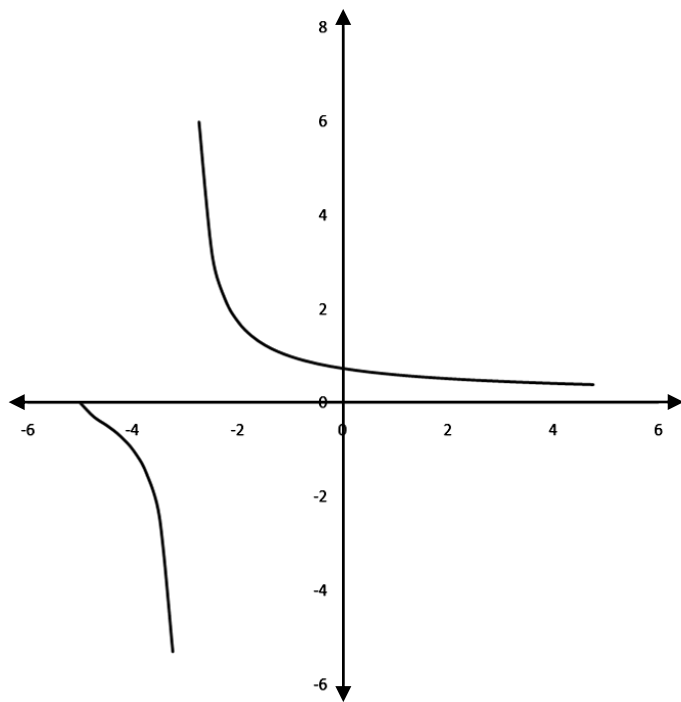
$$X + 3 \neq 0 \quad ; \quad X \neq -3$$

Estos valores lo traslado a la recta real para visualizar mejor los valores que se le pueden asignar a la variable "X" y los mismos conformarán el Dominio de la función estudiada,



$$\text{Dom } f(x) = [-5, -3) \cup (-3, +\infty)$$

Graficamos ahora la función para visualizar su Rango :



Rango = \mathbf{R}

EJERCICIO 19 : Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x+4}$$

Se nos presenta una función racional que en el numerador posee una función irracional.

Para determinar el Dominio debemos analizar por separado el numerador y el denominador.

Analizando el numerador :

Como el numerador es una raíz de índice par, la cantidad sub-radical o radicando tiene que ser mayor o igual a cero

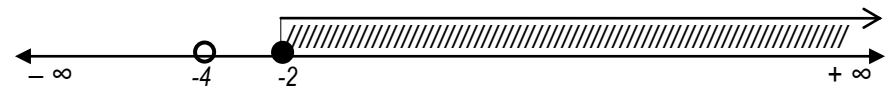
$$x + 2 \geq 0 \quad ; \quad x \geq -2$$

Analizando el denominador :

Como la división por cero no existe, el denominador nunca puede ser igual a cero. Luego :

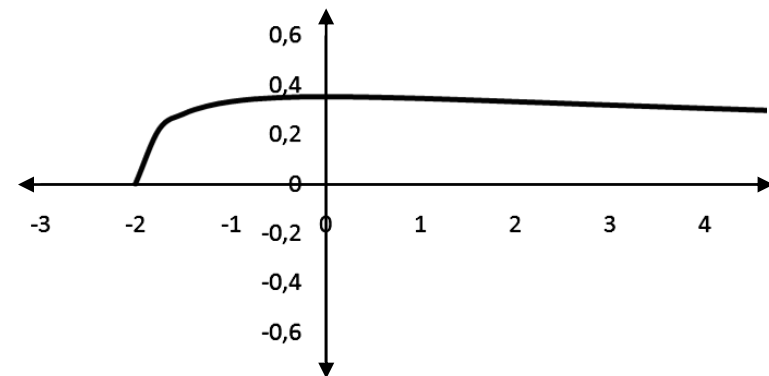
$$x + 4 \neq 0 \quad ; \quad x \neq -4$$

Estos valores lo traslado a la recta real para visualizar mejor los valores que se le pueden asignar a la variable "X" y los mismos conformarán el Dominio de la función estudiada,



$$\text{Dom } f(x) = [-2, +\infty)$$

Graficamos ahora la función para visualizar su Rango :



$$\text{Rango} = [0, 0.3535]$$

EJERCICIO 20 : Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = \frac{X+6}{\sqrt{X-5}}$$

Se nos presenta una función racional que en el denominador posee una función irracional.

Para determinar el Dominio debemos analizar por separado el numerador y el denominador.

Analizando el numerador :

El numerador es una función lineal (polinomio de primer grado). Esto significa que la variable "X" puede tomar cualquier valor.

Analizando el denominador :

Como el denominador es una raíz de índice par debo hacer dos consideraciones :

Primero: La cantidad sub-radical o radicando tiene que ser mayor o igual a cero

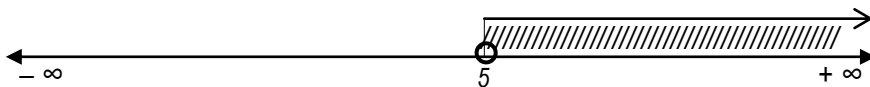
$$X - 5 \geq 0 \quad ; \quad X \geq 5$$

Segundo: Como la división por cero no existe, el denominador nunca puede ser igual a cero. Luego :

$$\sqrt{X-5} \neq 0$$

Al elevar ambos miembros al cuadrado ; $X - 5 \neq 0 \quad : \quad X \neq 5$

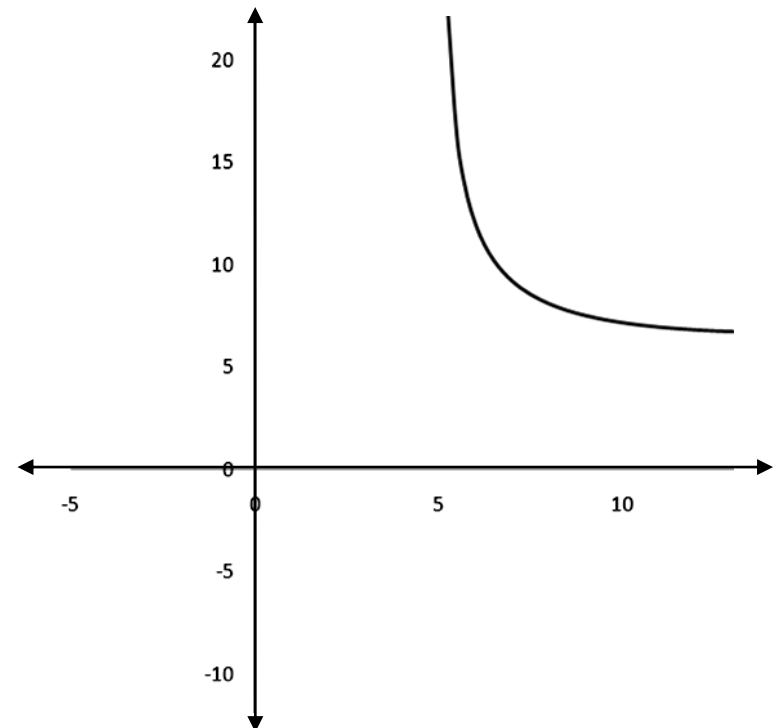
Estos valores lo traslado a la recta real para visualizar mejor los valores que se le pueden asignar a la variable "X" y los mismos conformarán el Dominio de la función estudiada,



Dominio y Rango de una Función

$$\text{Dom } f(x) = (5, +\infty)$$

Graficamos ahora la función para visualizar su Rango :



$$\text{Rango} = (5, +\infty)$$

Se recomienda ver los videos "DOMINIO DE FUNCIONES" a los que puedes acceder gratuitamente en la pagina web :

www.lamaticadefidel.com